命题逻辑(第一部分)

目录

什么是命题

定义

> 数理逻辑研究的中心问题是**推理**，而推理的前提和结论都是**命题**。因而**命题是推理的基本单位**。

具有确切真值的陈述句称为**命题**(proposition)。

该命题可以取一个“值”，称为**真值**。真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”(或“1”) 和“F”(或“0”)表示。

一切没有判断内容的句子，如命令句(或祈使句)、感叹句、疑问句、二义性的陈述句等都不能作为命题。

复合命题(如何产生新命题)

原子命题(简单命题)：**不能再分解**为更为简单命题的命题。

复合命题：**可以分解**为更为简单命题的命题。这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果……则……”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而成。

约定：通常用大写的带或不带下标的英文字母表示命题(包括原子命题和复合命题)。

$$A, B, C, \cdots, P, Q, R, \cdots,\ A_i, B_i, C_i, \cdots, P_i, Q_i, R_i, \cdots$$

命题联结词

复合命题中，一般是通过**联结词和标点符号**将简单命题联结成复杂的语句，最常见的**联结词**主要有以下五种：

“或者”、“并且”、“不”、“如果…… 则……”、“当且仅当”

否定联结词

设 P 是任意一个命题，复合命题 “非P” (或 “ P 的否定”)称为 P 的**否定式**(negation)，记作 $\neg P$。“$\neg$” 为**否定联结词。**

P 为真当且仅当 $\neg P$ 为假。

P	$\neg P$
0	1
1	0

> “$\neg$” 是自然语言中的“非”、“不”、“没有” 等的逻辑抽象。

合取联结词

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题 “ P 并且 Q ”(或“ P 和 Q ”)称为 P 与 Q 的**合取式**(conjunction)，记作 $P \wedge Q$。“$\wedge$” 为**合取联结词。**

$P \wedge Q$ 为真当且仅当 P、Q 同为真。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

> “$\wedge$” 是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”、“与”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“一面…, 一面…” 等的逻辑抽象；
>
> **但不是所有的“和”，“与”都要使用合取联结词表示**，要根据句子的语义进行分析。
>
> *e.g. 2 和 3 的最小公倍数是 6.（是简单命题，不能再分。）*

析取联结词

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题 “ P 或 Q ” 称为 P 与 Q 的**析取式**(disjunction)，记作 $P \vee Q$。“$\vee$ ” 为**析取联结词。**

$P \vee Q$ 为真当且仅当 P，Q 至少有一个为真。

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

> 联结词 “$\vee$” 是自然语言中的“或”、“或者” 等的逻辑抽象。
>
> 自然语言中的 “或” 有 “可兼或”(或称为**同或**)、“不可兼或”(即**异或**) 两种。严格来讲，**析取联结词实际上代表的是可兼或**，异或有时会使用单独的异或联结词“$\oplus$” 或“$\bar{\vee}$” 来表示。

蕴涵联结词

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题 “如果 P，则 Q” 称为 P 与 Q 的**蕴涵式**(implication)，记作 $P \to Q$。“$\to$” 为**蕴涵联结词**。

$P \to Q$ 为假当且仅当 P 为真且 Q 为假。

一般把蕴涵式 $P \to Q$ 中的 P 称为该蕴涵式的**前件**，Q 称为蕴涵式的**后件**。

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

> 在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。
>
> 但对于**数理逻辑**中的**蕴涵联结词**来说，当前件 P 为假时，不管 Q 的真假如何，**则 $P \to Q$ 都为真**。此时称为“**善意推定**”。
>
> e.g. 命题：如果角A 和角B 是对顶角，则角A 等于角B。
>
> *这个命题是我们非常熟悉的一个定理，当然是真命题。当前件为假时，这个定理依然成立。*

例 设 P：约翰学习微积分，Q：约翰是大学一年级学生。则以下的复合命题均可用 $P \to Q$ 表示。

1. 如果约翰学习微积分，则他是大学一年级学生。**如果P，则Q**
2. 因为约翰学习微积分，所以他是大学一年级学生。**因为P，所以Q**
3. 只要约翰学习微积分，他就是大学一年级学生。**只要P，就Q**
4. 约翰学习微积分仅当他是大学一年级学生。**P 仅当Q**
5. 只有约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。**只有Q，才P**
6. 除非约翰是大学一年级学生，他才能学习微积分。**除非Q，才P**
7. 除非约翰是大学一年级学生，否则他不学习微积分。**除非Q，否则$\neg P$**

等价联结词

设 P、Q 是任意两个命题，复合命题 “P 当且仅当 Q” 称为 P 与 Q 的**等价式**(equivalence)，记作 $P \leftrightarrow Q$，“$\leftrightarrow$” 为**等价联结词**(也称作双条件联结词)。

$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P、Q 同为真假。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

> “$\leftrightarrow$” 是自然语言中的“等价”、“充分必要条件”、“当且仅当” 等的逻辑抽象。

命题符号化及应用

回顾

联结词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果	对称性
否定	$\neg$	P 的否定	非 P	$\neg P$	$\neg P$ 的真值为“真” 当且仅当 P 的真值为“假”	无
合取	$\wedge$	P 并且 Q	P 合取 Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q$ 的真值为“真” 当且仅当 P、Q 的真值同为“真”	有
析取	$\vee$	P 或者 Q	P 析取 Q	$P \vee Q$	$P \vee Q$ 的真值为“真” 当且仅当 P、Q 的真值至少一个为“真”	有
蕴涵	$\rightarrow$	若 P，则 Q	P 蕴涵 Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$ 的真值为“假” 当且仅当 P 的真值为“真”、Q 的真值为“ 假”	无
等价	$\leftrightarrow$	P 当且仅当 Q	P 等价于 Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$ 的真值为“真” 当且仅当 P、Q 的真值同为“ 真” 或同为“ 假”	有

命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词是两个命题**真值**之间的联结，而**不是命题内容之间的连接**，因此复合命题的**真值**只取决于**构成他们的各简单命题的真值**，而与它们的内容无关，**与二者之间是否有关系无关。**

例

命题1：雪是白的当且仅当北京是中国的首都。
命题2：如果 2 是偶数，则天上就可以掉馅饼。
尽管两个简单命题的内容之间无关联，但二者均为合法命题，且具有确定的真值。

命题联结词的优先级

1. 所有五个联接词的优先顺序为：**否定，合取，析取，蕴涵，等价**；
2. 同级的联结词，按其出现的**先后次序**(从左到右)；

3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。**括号中的运算为最高优先级。**

复合命题符号化

例题 设命题

- P : 你陪伴我;
- Q : 你代我叫车子;
- R : 我将出去.

符号化下述语句：

1. 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去。
2. 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去。
3. 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。

解：

1. **如果**你陪伴我 **并且** 代我叫辆车子，**则**我将出去。

   符号化为：$(P \wedge Q) \to R$
2. **如果**你**不**陪伴我 **或** **不**代我叫辆车子，我将**不**出去。

   符号化为：$(\neg P \vee \neg Q) \to \neg R$
3. **除非**你陪伴我 **或** 代我叫车子，**否则**我将**不**出去。

   符号化为：$R \to (P \vee Q)$ 或 $(\neg P \wedge \neg Q) \to \neg R \quad \#$

联接词应用

开关电路

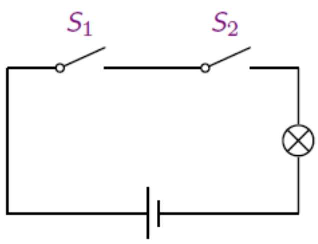


图1

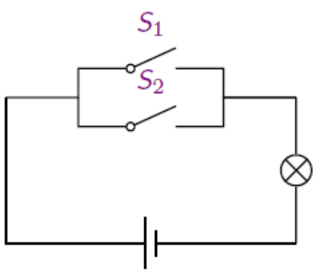


图2

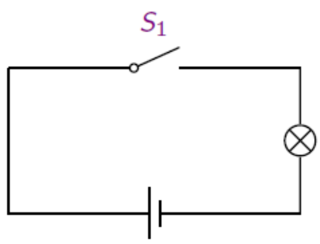


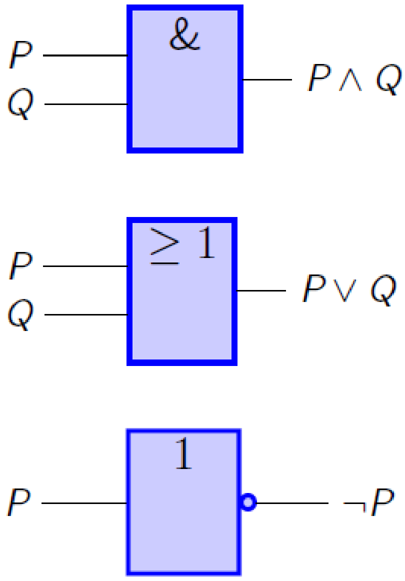
图3

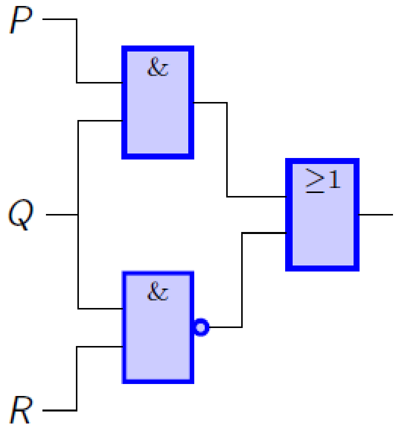
设命题 P: 开关 S_1 闭合；命题 Q: 开关 S_2 闭合。则用复合命题表示：

- (图1) 开关电路的“串联”：$P \wedge Q$
- (图2) 开关电路的“并联”：$P \vee Q$
- (图3) 开关电路的“断开”：$\neg P$

逻辑电路

命题联接词“∧”、“∨”、“¬” 对应于**与门**、**或门**和**非门**电路，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。





$(P \wedge Q) \vee \neg(Q \wedge R)$

网页检索 (布尔检索)

在布尔检索中，联接词“∧”（一般用 AND 表示）用于匹配包含两个检索项的记录，联接词“∨”（一般用 OR 表示）用于匹配包含两个检索项至少一个的记录，而联接词“¬”（一般用 NOT 表示）用于排除某个特定的检索项。

位运算

计算机中的信息采用二进制的方式来表达。每个二进制位只能是 1 或 0，可对应于某一个布尔变量的真值。当我们需要判断该布尔变量的真值时，就可以利用按位与（bitwise AND）或按位或（bitwise OR）以及按位取反（bitwise NOT）等来操作。

命题公式和真值表

命题变元

常值命题

一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T” (“1”)，就是具有值“F” (“0”)。

命题变量

一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**(或**命题变元**)(propositional variable)，该命题变量无具体的真值，它的**变域**是集合 $\{T, F\}$ (或 $\{0, 1\}$)。

> 复合命题是由**原子命题与联结词**构成的命题。所以，当其中的**原子命题是命题变元**时，此**复合命题也即为命题变元的函数**，且该函数的值仍为“真”或“假”值。
>
> 这样的函数可形象地称为**“真值函数”** 或**“命题公式”**，此命题公式**没有确切的真值**。

命题公式

命题演算的合式公式 (well formed formula，wff)，又称**命题公式**(简称公式)，按如下规则生成：

(1). 命题变元本身是一个公式；　(2). 如 G 是公式，则 ($\neg G$) 也是公式；

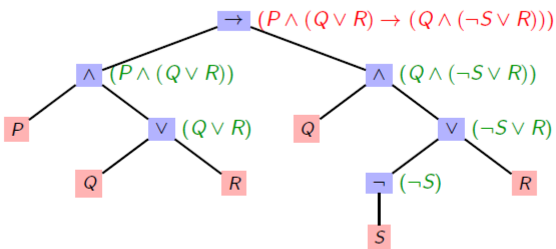
(3). 如 G、H 是公式，则 ($G \wedge H$)、($G \vee H$)、($G \rightarrow H$)、($G \leftrightarrow H$) 也是公式；

(4). 仅由**有限步使用规则(1)、(2)、(3)**后所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串才是命题公式.

> 如果 G 是含有 n 个命题变元 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 的公式，可记为：$G(P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n)$ 或简写为 G。

说明

1. **原子命题变元**是最简单的合式公式，称为**原子合式公式**，简称**原子公式**；
2. 命题公式**没有真值**，只有对其命题变元进行**真值指派**后，方可确定命题公式的真值；
3. 整个公式的最外层括号可以省略；公式中不影响运算次序的括号也可以省略。
4. 在实际应用中，为了便于存储和运算，命题公式常用**二元树**的方式来表达。如图：



公式的解释

设 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 是出现在公式 G 中的**所有命题变元**，指定 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 一组真值，则这组真值称为 G 的一个**解释**，常记为 I。

如果公式 G 在解释 I 下是真的，则称 I **满足** G，此时 I 是 G 的**成真赋值**；如果 G 在解释 I 下是假的，则称 I **弄假于** G，此时 I 是 G 的**成假赋值**。

真值表

由公式 G 在其**所有可能的解释下所取真值**构成的表，称为 G 的**真值表**(truth table)。

- 一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。
- 利用真值表，可得到公式的所有成真赋值和成假赋值。

真值表的画法

一般我们将公式中的**命题变元**放在真值表的**左边**，将**公式的结果**放在真值表的**右边**。有时为了清楚起见，可将求公式的中间结果也放在真值表中。

例题 设有公式：$G=(P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\land R))\lor Q$，求 G 的真值表。

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P\leftrightarrow Q$	$(\neg P\leftrightarrow Q)\land R$	$P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\land R)$	G
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

可进一步简化为：

P	Q	R	$G=(P\to((\neg P\leftrightarrow Q)\land R))\lor Q$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

公式的分类和逻辑等价

命题公式分类

- 公式 G 称为**永真公式** (**重言式**,tautology)，如果在它的所有解释之下其真值都为“真”。
- 公式 G 称为**永假公式** (**矛盾式**,contradiction)，如果在它的所有解释之下其真值都为“假”。

  有时也称永假公式为**不可满足公式。**
- 公式 G 称为**可满足公式**(satisfiable)，如果它不是永假的。

三种特殊公式之间的关系

- G 是**永真**的当且仅当 $\neg G$ 是**永假**的；
- G 是**可满足的**当且仅当**至少有一个解释** I**，使** G **在** I **下为真。**
- 若 G 是**永真式**，则 G 一定是**可满足式**，但反之可满足公式**不一定**是永真式。

公式的等价

设 G，H 是两个命题公式，P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 是出现在 G，H 中**所有的命题变元**，如果对于 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n 的 2^n 个解释，G 与 H 的**真值结果都相同**，则称公式 G 与 H 是**等价**的， 记作 $G = H$（或 $G \Leftrightarrow H$）。

公式等价的充分必要条件

对于任意两个公式 G 和 H，$G = H$ 的**充分必要条件是公式** $G \leftrightarrow H$ **是永真公式。**

证明

（1）*必要性*：假定 $G = H$，则 G，H 在其任意解释 I 下，或同为真，或同为假。于是由 “$\leftrightarrow$” 的意义知，公式 $G \leftrightarrow H$ 在其任何的解释 I 下，其真值为“真”，即 $G \leftrightarrow H$ 为永真公式。

（2）*充分性*：假定公式 $G \leftrightarrow H$ 是永真公式，I 是它的任意解释，在 I 下，$G \leftrightarrow H$ 为真。因此， G，H 或同为真，或同为假，由于 I 的任意性，故有 $G = H$。 #

命题公式的可判定性

可判定性：能否给出一个**可行方法**，完成对任意公式的判定类问题。（类型或等价判定）

命题公式是可判定的。

基本等价关系及其应用

基本等价关系

设 G, H, S 为任意的命题公式。

1. $E_1 : G \vee G = G;$ $E_2 : G \wedge G = G.$ （幂等律）
2. $E_3 : G \vee H = H \vee G;$ $E_4 : G \wedge H = H \wedge G.$ （交换律）
3. $E_5 : G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S;$ $E_6 : G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S.$ （结合律）
4. $E_7 : G \vee 0 = G;$ $E_8 : G \wedge 1 = G.$ （同一律）
5. $E_9 : G \vee 1 = 1;$ $E_{10} : G \wedge 0 = 0.$ （零律）
6. $E_{11} : G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$ $E_{12} : G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S).$ （分配律）
7. $E_{13} : G \vee (G \wedge H) = G;$ $E_{14} : G \wedge (G \vee H) = G.$ （吸收律）
8. $E_{15} : \neg G \wedge G = 0.$ （矛盾律）
9. $E_{16} : \neg G \vee G = 1.$ （排中律）
10. $E_{17} : \neg(\neg G) = G.$ （双重否定律）
11. $E_{18} : \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$ $E_{19} : \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H.$ （德摩根律）
12. $E_{20} : G \to H = \neg G \vee H.$ （蕴涵式）
13. $E_{21} : G \to H = \neg H \to \neg G.$ （假言易位）
14. $E_{22} : G \leftrightarrow H = (G \to H) \wedge (H \to G) = (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G).$ （等价式）
15. $E_{23} : G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H.$ （等价否定等式）
16. $E_{24} : (G \to H) \wedge (G \to \neg H) = \neg G.$ （归谬论）

应用

判断公式类型

例题 利用命题公式的基本等价关系，证明 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 是重言式。

证明：

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \land P \to Q & \\
= \ & (\neg P \lor Q) \land P \to Q = \neg((\neg P \lor Q) \land P) \lor Q & (\text{蕴含式}) \\
= \ & (\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg P) \lor Q = ((P \land \neg Q) \lor \neg P) \lor Q & (\text{德摩根律}) \\
= \ & ((P \lor \neg P) \land (\neg Q \lor \neg P)) \lor Q & (\text{分配律}) \\
= \ & (1 \land (\neg Q \lor \neg P)) \lor Q & (\text{排中律}) \\
= \ & (\neg Q \lor \neg P) \lor Q & (\text{同一律}) \\
= \ & (\neg Q \lor Q) \lor \neg P & (\text{结合律，交换律}) \\
= \ & 1 \lor \neg P & (\text{排中律}) \\
= \ & 1 & (\text{零律})
\end{aligned}
$$

故公式 $(P \to Q) \land P \to Q$ 是重言式. #

证明公式等价

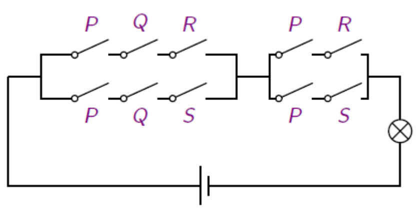
例题 利用命题公式的基本等价关系，证明 $P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$。

证明:

$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \to R) & \\
= \ & \neg P \lor (\neg Q \lor R) & (\text{蕴含式}) \\
= \ & (\neg P \lor \neg Q) \lor R & (\text{结合律}) \\
= \ & \neg(P \land Q) \lor R & (\text{德摩根律}) \\
= \ & (P \land Q) \to R \quad \# & (\text{蕴含式})
\end{aligned}
$$

开关电路化简

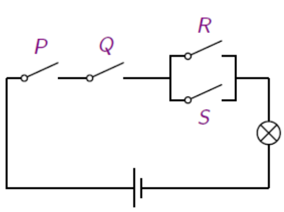
例题 利用命题公式的基本等价关系，化简下图所示开关电路。



解:

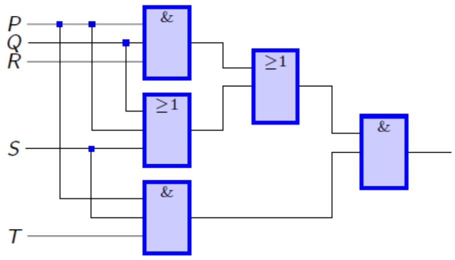
$$
\begin{aligned}
& ((P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land S)) \land ((P \land R) \lor (P \land S)) \\
= \ & (P \land Q \land (R \lor S)) \land (P \land (R \lor S)) \\
= \ & P \land Q \land (R \lor S) \land P \land (R \lor S) \\
= \ & P \land Q \land (R \lor S)
\end{aligned}
$$

故化简后的开关电路如下:



逻辑电路化简

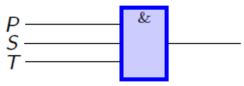
例题 利用命题公式的基本等价关系，化简下图所示逻辑电路。



解：

$$
\begin{aligned}
& ((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \vee Q \vee S)) \wedge (P \wedge S \wedge T) & \\
= \ & (((P \wedge Q \wedge R) \vee P) \vee Q \vee S) \wedge (P \wedge S \wedge T) & (\text{结合律}) \\
= \ & (P \vee Q \vee S) \wedge (P \wedge S \wedge T) & (\text{吸收律}) \\
= \ & ((P \vee Q \vee S) \wedge P) \wedge S \wedge T & (\text{结合律}) \\
= \ & P \wedge S \wedge T & (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

故化简后的逻辑电路如下：



智力游戏

例题 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

解：令命题 P: 男管家说的是真话；Q：厨师说的是真话；R：园丁说的是真话；S：杂役说的是真话。

则将上述已知条件符号化：

- **如果**男管家说的是真话，**那么**厨师说的也是真话 -> $P \rightarrow Q$
- 厨师和园丁说的**不可能都是**真话 -> $\neg(Q \wedge R)$
- 园丁和杂役**不可能都**在说谎 -> $\neg(\neg R \wedge \neg S)$
- **如果**杂役说真话，**那么**厨师在说谎 -> $S \rightarrow \neg Q$

并列出真值表，选取真值结果全为真的行如下表：

P	Q	R	S	$P \rightarrow Q$	$\neg(Q \wedge R)$	$\neg(\neg R \wedge \neg S)$	$S \rightarrow \neg Q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见，可以确定 P，Q 必然为假，但无法确定 R 和 S 的值. 因而**只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。** #